函数与导数问题中求参数范围的策略

东莞市第六高级中学 安娜

【摘要】 函数与导数是高考考查的中点内容，一般在压轴题的位置，含有参数的导数问题一直是高考热点，本文是针对如何求解函数问题中参数的范围进行探讨.

【关键词】 导数；参数；范围

1 求参数范围的三个策略

1.1 分离参数

分离参数即把含参数的方程或不等式中的参数分离出来，如果我们将含参数的方程经过变形，将参数分离出来，使方程的一端化为只含参数的解析式，而另一端化为与参数方程无关的主变元函数.此方法的好处是把参数分离出来之后，不等式的另一边便可以看成一个确定的函数，再求新函数的最值，问题会变得简洁.但分离参数时条件限制的，例如 $a\cdot f(x)\le g(x)$，由于不等式的性质，需要明确 $f(x)$ 的正负，才能把参数 a 分离出来.

例1 设 $f(x)=\dfrac{a}{x}+x\ln x, g(x)=x^3-x^2-3$.如果对任意的 s，$t\in[\frac{1}{2},2]$，都有 $f(s)\ge g(t)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

分析：对任意 s，$t\in[\frac{1}{2},2]$，都有 $f(s)\ge g(t)$ 成立

↓（理解“任意”含义，其中 s 与 t 取不同的值）

$f(x)_{\min}\ge g(x)_{\max}$

↓ 求得 $g(x)_{\max}=1$

$\dfrac{a}{x}+x\ln x\ge 1$ 恒成立

↓ 分离参数 a

$a\ge x-x^2\ln x$ 恒成立

↓ 求 $h(x)=x-x^2\ln x$ 的最大值

$a\ge h(x)_{\max}$

解题过程：

对任意的 s，$t\in[\frac{1}{2},2]$，都有 $f(s)\ge g(t)$ 成立

等价于在区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上，函数$f(x)_{\min} \ge g(x)_{\max}$

因为$g(t)=t^3-t^2-3$

所以$g'(t)=3t-2t^2=t(3t-2)$

令$g'(t)=0, \therefore t=0$或$t=\frac{2}{3}$

令$g'(t)>0, \therefore \frac{2}{3}<t\le 2$

令$g'(t)<0, \therefore \frac{1}{2}\le t<\frac{2}{3}$

所以$g(t)$在$\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{2}{3},2\right]$上单调递增

所以$g(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-3=-\frac{25}{8}$，$g(2)=8-3-4=1$

所以$g(x)_{\max}=g(t)_{\max}=1$

所以，在区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上，$f(x)=\frac{a}{x}+x\ln x\ge 1$恒成立

等价于$\frac{a}{x}\ge 1-x\ln x$，等价于$a\ge x-x^2\ln x$

设$h(x)=x-x^2\ln x$

（由于一次求导之后，不能确定导数的正负，因此进行二次求导）

所以$h'(x)=1-2x\ln x-x$

所以，　$h''(x)=-2(\ln x+1)$

因为$\frac{1}{2}\le x\le 2, \ \therefore \ln x+1>0$

所以，在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上，$h''(x)<0$恒成立

所以$h'(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$单调递减

又因为$h'(1)=1-2\ln 1-1=0$

所以，当$\frac{1}{2}\le x<1$时，$h'(x)>0$

当$1<x\le 2$时，$h'(x)<0$

所以，$h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,2\right]$ 上单调递增

所以，当 $x=1$ 时，$h(x)_{\max}=h(1)=1-\ln 1=1$

所以 $a\geq 1$.

此题求 a 的取值范围满足分离参数的条件，进而转化为求函数的最值问题，在求 $h(x)$ 最大值时，利用了二次求导的方法. 但分离参数方法的使用有条件限制，有一定的局限性. 如若遇到不能分离参数的问题，可用分类讨论的方法.

1.2 分类讨论

分类讨论是解决问题的一种逻辑方法，分类讨论思想即把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想. 分类讨论思想在高中数学中是一种重要的思想方法，在分析解决问题的过程中起着重要的作用，也是高考中的高频考点，其难点在于如何分类. 在含参的函数问题中，分类讨论一般是由参数的变化引起的，由于参数的取值不同会导致所得结果不同.

例2 已知函数 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递减且满足 $f(0)=1, f(1)=0$，求 a 的取值范围.

分析 $f(0)=1, f(1)=0$. 求出 a,b,c 的值或关系

↓

$f(x)=\left[ax^2-(a+1)x+1\right]\cdot e^x$

↓

$f'(x)=\left[ax^2+(a-1)x-a\right]\cdot e^x\leq 0$ 在 $\left[0,1\right]$ 上恒成立

↓

$ax^2+(a-1)x-a\leq 0$

↓ 不满足分类讨论的条件

转变为二次不等式问题，由于二次项系数含有参数，因此进行分类讨论.

解题过程：

由 $f(0)=1, f(1)=0$.

$$\begin{cases} c=1 \\ (a+b+c)e=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b=-1 \end{cases}$$

所以 $f(x)=[ax^2-(a+1)x+1]\cdot e^x$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

所以 $f'(x)=[ax^2+(a-1)x-a]\cdot e^x\le 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立

等价于 $ax^2+(a-1)x-a\le 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立

（由于二次项系数为参数 a，所以对应的函数 $g(x)=ax^2+(a-1)x-a$ 可能为二次函数，也可能为一次函数，因此对 a 进行讨论，分别讨论 $a>0$，$a=1$，$a=0$，$a<0$ 四种情况.）

①当 $a>0$ 时，因为二次函数 $g(x)=ax^2+(a-1)x-a$ 的图像开口向上

而 $g(0)=-a<0$，所以需要 $g(1)=(a-1)e<0$，即 $0<a<1$.

②当 $a=1$ 时，$g(x)=x^2-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$g(0)=-1<0, g(1)=0$ 符合条件，所以 $a=1$

③当 $a=0$ 时，$g(x)=-x$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

$g(0)=0, g(1)=-1<0$ 符合条件，所以 $a=0$

④当 $a<0$ 时，$g(x)=ax^2+(a-1)x-a$ 的图像开口向下

$g(0)=-a>0$ 不符合条件

故 a 的取值范围为 $[0,1]$.

本题的突破点是把问题转化为导数小于等于0的恒成立问题，恒成立问题中，首选分离参数的方法，但本题不满足分离的条件，因此问题转化为二次项和一次项均含有参数不等式恒成立问题，档二次项为零时，本题变为一次不等式，一次分类讨论的方向便由此确定下来，分别讨论 $a>0$，$a=1$，$a=0$，$a<0$ 四个方面进行讨论.

1.3 以参数为新元

分类讨论后仍不能求出参数的范围时，便需要一些特殊的方法进行解题，跳出固有的思维，把参数当做新元解决问题，使问题更简洁.

例3 已知 $f(x)=x^2+a\ln x-2$，若 $f(x)+1\ge 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

分析 $f'(x)=2x+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2+a}{x}$

$\downarrow$ $f(x)+1\ge 0$ 恒成立

$f(x)_{\min} \ge -1$

$\downarrow$

讨论参数$a>0$和$a<0$，但是$a<0$时，但求到$-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-1\ge 0$便无法求解，所以后便以$a$为新元，解决新的函数问题.

解题过程 函数定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=2x+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+a}{x}$.

因为$f(x)+1\ge 0$恒成立，等价于$f(x)\ge -1$恒成立，即$f(x)_{\min}\ge -1$

若$a\ge 0$时，则$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

所以当$x\to 0$时，$f(x)\to -\infty$，不符合题意

若$a<0$时，令$f'(x)=0$，则$x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$

令$f'(x)>0,$则$x>\sqrt{-\frac{a}{2}}$，所以$f(x)$在$(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty)$单调递增

令$f'(x)<0,$则$0<x<\sqrt{-\frac{a}{2}}$，所以$f(x)$在$(0,\sqrt{-\frac{a}{2}})$单调递减

所以，当$x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$时，$f(x)_{\min}=f(\sqrt{-\frac{a}{2}})=-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-2\ge -1$

即只需证明 $-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-1\ge 0$

（到了这一步，很难再求a的取值范围，因此把题目转化成为证明$-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-1\ge 0$的问题，进而转化为研究以$a$为新元的函数恒大于等于0的问题，因此设新函数$h(a)$.）

令$h(a)=-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-1=-\frac{a}{2}+a(\frac{1}{2}\ln(\frac{-a}{2}))-1=-\frac{a}{2}+a(\frac{1}{2}\ln(-a)-\frac{1}{2}\ln 2)-1$

所以$h'(a)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(-a)+\frac{a}{2}(-\frac{1}{a})-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln(-\frac{a}{2})=\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}$

令$h'(a)=0$，则$\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}=0$，则$a=-2$

令 $h'(a)>0$，则 $\sqrt{-\frac{a}{2}}>1$，则 $a<-2$，所以 $h(a)$ 在 $(-\infty,-2)$ 单调递增

令 $h'(a)<0$，则 $\sqrt{-\frac{a}{2}}<1$，则 $-2<a<0$，所以 $h(a)$ 在 $(-2,0)$ 单调递减

所以，当 $a=-2$ 时，$h(x)_{\max}=h(-2)=1+0-1=0$

所以 $h(a)\geq 0$，$-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-1\geq 0$ 成立

所以 $a=2$

因为分类讨论并不能求出 a 的范围，因此转化为关于 a 的函数大于等于0的恒成立的问题，使问题变的更加简洁，但是这种方法对于学生的思维要求较高.

2 策略之反思

2.1 含蓄的分离参数法

分离参数法的使用是有条件限制的，并不是所有的参数都能分离，在恒成立问题中，首选分离参数法的目的是分离出一个确定的函数，进而求这个确定的函数的最值.而有些参数看似不能分离，实则条件隐藏较深，需要仔细挖掘.

例如 已知函数 $f(x)=x^2e^{-x}$ 及 $g(x)=x+\frac{4}{x}$，其中 e 为自然对数的底数.若对任意的 $x_0\in(0,+\infty)$，不等式 $(m+1)f(x_0)\leq(m-1)g(x_0)$ 恒成立，求正数 m 的取值范围.

此题在使用分离参数的过程中遇到的问题是不确定 $m-1$ 和 $f(x_0)$ 的正负，因此要要分析函数 $f(x)$ 的性质，发现 $f(x)$ 是恒大于零的，所以 $(m-1)f(x_0)>0$ 是恒成立的，同时 $g(x)>0$ 是恒成立的，所以 $(m-1)g(x_0)>0$ 也是恒成立的，因此 m 是大于1的数，所以 $m-1>0$ 成立，因此 $m-1$ 可以分离到不等式的左边，进而得到 $\frac{m+1}{m-1}\leq\frac{g(x_0)}{f(x_0)}$ 恒成立的问题.只要求出 $\frac{g(x_0)}{f(x_0)}$ 的最小值即可.

本题的难点是对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 两个函数的理解要到位，分析过程中也使用了分类讨论的思想，通过分类讨论，最终确定可以分离参数，分类讨论的思想方法在数学中应用及其广泛.

2.2 全能的分类讨论法

分离参数的方法确实可以使问题变成求解确定函数的最值问题，但有些问题分离参数后，反而会使问题的求解变得更加困难，加大题目的计算量和思维量.

例如 已知$kx^2-x+\ln(x+1)\geq 0$在$\left[0,+\infty\right)$上恒成立，求参数k思维取值范围.此题若是用分离参数法可得$k\geq\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}$在$\left[0,+\infty\right)$上恒成立，令$g(x)=\dfrac{x-x\ln x}{x^2}$，只需$k\geq g(x)_{\max}$，因此对$g(x)$进行求导，可得$g'(x)=\dfrac{x^2-\dfrac{x}{x+1}-2x-2\ln(x+1)}{x^4}$,在求导之后，需要判断$g'(x)$的正负，进而求得$g(x)$的最大值，在求解的过程中难度很大，计算量很大，因此本题选择分离参数法并不是合适的方法，分类讨论反而会使问题更简单.要使$kx^2-x+\ln(x+1)\geq 0$在$\left[0,+\infty\right)$上恒成立，令$f(x)=kx^2-x+\ln(x+1)$，只需$f(x)_{\min}\geq 0$在$\left[0,+\infty\right)$上恒成立即可，对$f(x)$进行求导可得$f'(x)=\dfrac{x(2kx+2k-1)}{x+1}$,当$k=0$时，$f'(x)>0$恒成立.当$k\neq 0$时，令$f'(x)=0$可得，$x=\dfrac{1}{2k}-1$或$x=0$，连根的大小不能确定，要进行分类讨论，由此分类讨论的方向便可确定.

在本题的求解过程中，分类讨论方法的求解过程更加简洁，计算量较小.在做题的过程中首先进行实际操作，在选择更适合的方法，在教学过程中要培养学生不要形成思维定式.

在上文中，对如何求解函数中参数的取值范围进行了探究，在实际解决问题的过程中，需要根据情况分析，选择适当的方法，更快更准的获取正确答案.

【参考文献】

[1] 杜卫杰.高中数学教学中分类讨论思想的应用[J].新课程学习.2011

[2] 张方东.高中数学分类讨论思想的应用[J].亚太教育.2015

[3]李克大.分类讨论的数学思想及其应用.[J].中学生数学，2010